Potentialul electric in regiunea a doi cilindrii conductori lungi

Aceasta este o porblema interesanta de electricitate si magnetism avand in vedere pericolele ce pot aparea in apropierea stalpiilor de inalta tensiune ale liniilor electrice aeriene purtatoare de tensiuni ridicate. In majoritatea cartilor, acesta problema are ca solutie integrarea functiei campului electric din aplicarea legii lui Gauss.

$$E\cdot(2\pi\cdot r\cdot L)\cdot\varepsilon_o=\lambda\cdot L \qquad E=\frac{\lambda}{2\pi\cdot\varepsilon_o\cdot r} \qquad \Delta V=-\int_{r_o}^{r}E\,dr \qquad V=V_o-\frac{\lambda}{2\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\ln\left(\frac{r}{r_o}\right)$$

unde λ este sarcina pe unitatea de lungime, r_o este o distanta arbitrara intre liniile de sarcina iar V_o este potentialul la distanta r_o.

Ca urmator pas in rezolvarea acestei probleme, consideram azul a daoua linii electrice aeriene delungime infinita, paralele si incarcate electric fiind la o distanta relativ mica una de alta. Pentru a usura calculul, am ales cazul in care cele doua linii electrice sunt incarcate cu sarcini electrice egale in modul si de sens contrar. Putem vedea potentialele rezultate de la cele doua linii electrice combinandu-se astfel:

$$V=V_1+V_2 \qquad V=\left(V_o-\frac{\lambda}{2\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_o}\right)\right)+\left[-V_o-\frac{-\lambda}{2\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\ln\left[\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{r_o}\right]\right]$$

Cei doi termeni Vo se anuleaza reciproc. Astfel:

$$V=\frac{\lambda}{2\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\ln\left[\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{r_o}\cdot\frac{r_o}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] \qquad V=\frac{\lambda}{\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\ln\left[\frac{(x-a)^2+y^2}{x^2+y^2}\right]$$

La prima vedere, se pare ca toti termenii arbitrari au fost anulati.Totusi, este prin definitie arbitrar. Numai variatiile potentialului
au influente fizice directe semnificative. Astfel, putem aduna sau scade un termen arbitrar la expresia potentialului de mai sus.

Aceasta modificare a potentialului ne determina sa examinam liniile de echipotential din vecinatatea celor doua linii electrice. In aceasta analiza, prezenta sau absenta termenului arbitrar nu face nici o diferenta. Vom cauta acele linii de echipotential in care argumentul functiei logaritmice este constant.

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{x^2+y^2}=C^2$$

[Constanta a fost scrisa sub forma patratica pentru a usura calculele ce urmeaza.]

$$(x-a)^2+y^2=C^2\cdot\left(x^2+y^2\right)$$

$$(x-a)^2+y^2-C^2\cdot\left(x^2+y^2\right)=0$$

$$\left(1-C^2\right)\cdot x^2-2\cdot x\cdot a+\left(1-C^2\right)\cdot y^2+a^2=0$$

$$x^2-\frac{2\cdot a\cdot x}{1-C^2}+y^2+\frac{a^2}{1-C^2}=0$$

$$\left(x-\frac{a}{1-C^2}\right)^2+y^2=\frac{\left(a^2\cdot C^2\right)}{\left(1-C^2\right)^2}$$

Liniile de echipotential sunt cercuri ale caror raze sunt dade de: $\frac{a\cdot C}{1-C^2}$ si care sunt centrate in punctul:
$\left(x=\frac{a}{1-C^2},\ y=0\right)$.

Pentru a folosi rezultatele pe care le avem in scpul obtinerii solutiei dorite, trbuie sa obsrervam comportamentul potentialului electric in vid care este guvernat de legea lui Laplace:
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}V+\frac{\partial^2}{\partial y^2}V=0$ si daca V este cunoscut la limita regiunii, atunci solutia ecuatiei este unica (cu exceptia constantei arbitrare). Daca von gasi o functie de potential care indeplineste conditiile frontierei, atunci l-am gasit pe V.

Felul in care ne vom folosi de faptul ca liniile de echipotential se foermeaza in preajma celc doua linii paralele strabatute de sarcini opuse, este acela de considera o linie de echipotentia ca fiind "suprafata" unei linii si ultima, "suprafata" celeilalte linii. Acum vom alege constantele astfel incat liniile sa aiba potentialele dorite.

Fie ca cilindrii sa aiba raza R dar unul din cilindrii sa aiba axa paralela cu x = 0 si celalalt sa aiba axa:
x = b. Fie ca cilindrul din x = 0 sa aiba potentialul V = 0 (impamantarea) si celalat cilindru sa aiba potentialul V1.

Acum se pare ca nu putem avea un echipotential centrat in x = 0 numai daca acesta are raza egala cu zero. Totusi,originea axei x este arbitrara si deci poate fi schimbata. Ceea ce nu se schimba va fi distanta dintre centre.

Sa calculam 'a' si 'C'.

Avem: $\frac{a\cdot C}{1-C^2}=R$ si $\left|\frac{a}{1-C1^2}-\frac{a}{1-C2^2}\right|=b$. Avem doua valori pentru C, si una pentru a.

Ecuatia: $R \cdot C^2 + a \cdot C - R = 0$ are solutiile: $C1 = -\left(\frac{a}{2R}\right) + \sqrt{\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + 1}$ si $C2 = -\left(\frac{a}{2R}\right) - \sqrt{\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + 1}$.

Vom folosi ecuatia de sus pentru 'b', distanta dintre centre, si cele doua valori pentru C pe care trebuie sa le gasim pentru b si R. Dar cum deja avem C in loc de R ne permitesa neglijem pentru moment pe R si b.

Mai intai inseram valorile lui 'C' in ecuatia lui 'b':

$$\left| a \cdot \left[\frac{1}{1 - \left[-\left(\frac{a}{2R}\right) + \sqrt{\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + 1}\right]^2} - \frac{1}{1 - \left[-\left(\frac{a}{2R}\right) - \sqrt{\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + 1}\right]^2} \right] \right| = b$$

Dupa mai multe calcule, ecuatia de mai sus devine: $\left\| \left[\frac{\left(a^2 + 4 \cdot R^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{R^2} \cdot R \right] \right\| = b$ putand sa o rescriem sub forma: $\sqrt{a^2 + 4 \cdot R^2} = b$. In urma rezolvarii obtinem: $a = \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}$. [De mentionat faptul ca trebuie respectata conditia fizica de minima distanta de cel putin doua raze.

Fiecare dintre expresiile lui C includ termenul : $\sqrt{\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + 1} = \frac{b}{2R}$ asi pentru C avem: $C1 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{2R}$ si $C2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{2R}$.

De asemenea vom avea: $\frac{a}{1 - C1^2} = \frac{R}{C1} = \frac{2 \cdot R^2}{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}$ $\qquad$ $\frac{a}{1 - C2^2} = \frac{R}{C2} = -\frac{2 \cdot R^2}{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}$

Functia noastra de potentia se refera la coordonatele originiisistemuluiin care una din liniile incarcate esde paralela cu axa 'z'. Pentru a schimaba coordonatele sistemuluiin care unul din echipotentiale este centrat in axa z, vm schimba originea la stanga.

$$x_{new} = x_{old} + \frac{2 \cdot R^2}{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}} \quad \text{sau} \quad x_{old} = x_{new} - \frac{2 \cdot R^2}{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}$$

Avem formula potentialului: $V = \frac{\lambda}{\pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \ln\left[\frac{(x - a)^2 + y^2}{x^2 + y^2}\right]$

Definim: $A = \frac{\lambda}{\pi \cdot \varepsilon_o}$, obtine o valoare si o intoarce in noul sistem de axe .

$$V = A \cdot \ln\left[\frac{\left(x - \frac{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{2}\right)^2 + y^2}\right] + V_a \qquad V = A \cdot \ln\left[\frac{\left[2 \cdot x - \left(b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)\right]^2 + 4 \cdot y^2}{\left[2 \cdot x - \left(b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)\right]^2 + 4 \cdot y^2}\right] + V_a$$

In acest punct, trebuie sa evaluam cele doua necunoscute ramase: A si V_a Vom aranja potentialele pe suprafetele celor doi cilindrii pentru a obtine valorile statice ale lor. Aceasta va produce o serie de ecuatii simultane pe care le putem rezolva in favoarea constantelor. Atunci potentialul va complet cunoscut.

Suprafata cilindrului centrat in axa z este: $x^2 + y^2 = R^2$

$$\frac{\left[2 \cdot x - \left(b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)\right]^2 + 4 \cdot y^2}{\left[2 \cdot x - \left(b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)\right]^2 + 4 \cdot y^2} \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{substitute}, y^2 = R^2 - x^2 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{\left[b + \left(b^2 - 4 \cdot R^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[b - \left(b^2 - 4 \cdot R^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

$$\frac{\left(b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)^2}{\left(b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right) \cdot \left(b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)} = \frac{\left(b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)^2}{\left(4 \cdot R^2\right)}$$

$$2 \cdot A \cdot \ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{2 \cdot R}\right) + V_a = 0$$

Suprafata pentru cilindrul centat in coordonatele: y = 0, x = b este: $(x - b)^2 + y^2 = R^2$

$$\frac{\left[2 \cdot x - \left(b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)\right]^2 + 4 \cdot y^2}{\left[2 \cdot x - \left(b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)\right]^2 + 4 \cdot y^2} \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{substitute}, y^2 = R^2 - (x - b)^2 \\ \text{expand} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{\left[b - \left(b^2 - 4 \cdot R^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[b + \left(b^2 - 4 \cdot R^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

$$2 \cdot A \cdot \ln\left(\frac{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{2 \cdot R}\right) + V_a = V1$$

Acum putem determina cele doua constante dorite.

$$2 \cdot A \cdot \left(\ln\left(\frac{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{2 \cdot R}\right) - \ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{2 \cdot R}\right)\right) = V1$$

Rezolvam ecuatia pentru A :

$$A = \frac{V1}{2 \cdot \ln\left(\dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}\right)}$$

Inlociund-o in prima ecuatie, obtinem:

$$V_a = -V1 \cdot \frac{\ln\left(\dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{2 \cdot R}\right)}{\ln\left(\dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}\right)}$$

Functia potentialului va fi:

$$V = \frac{V1}{\ln\left(\dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}\right)} \cdot \left[\ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{2 \cdot R}\right) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left[\frac{\left[2 \cdot x - \left(b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)\right]^2 + 4 \cdot y^2}{\left[2 \cdot x - \left(b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)\right]^2 + 4 \cdot y^2}\right]\right]$$

Trebuie sa dam valori constantelor si sa incercam functia pe suprafete.

$V1 := 10 \qquad R := 1 \qquad b := 5$

$$V(x, y) := \frac{V1}{\ln\left(\dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}\right)} \cdot \left[\ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}}{2 \cdot R}\right) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left[\frac{\left[2 \cdot x - \left(b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)\right]^2 + 4 \cdot y^2}{\left[2 \cdot x - \left(b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot R^2}\right)\right]^2 + 4 \cdot y^2}\right]\right]$$

$V(0, 1) = 0 \qquad V(1, 0) = 0 \qquad V(-1, 0) = 0 \qquad V(0, -1) = 0 \qquad V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

$V(4, 0) = 10 \qquad V(6, 0) = 10 \qquad V(5, 1) = 10 \qquad V(5, -1) = 10 \qquad V\left(5 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 10$

Se pare ca functia este corecta. Totusi a mai ramas o problema. Trebuie sa tinem cont de faptul c
potentialul in interiorul fiecarui cilindru este constant.

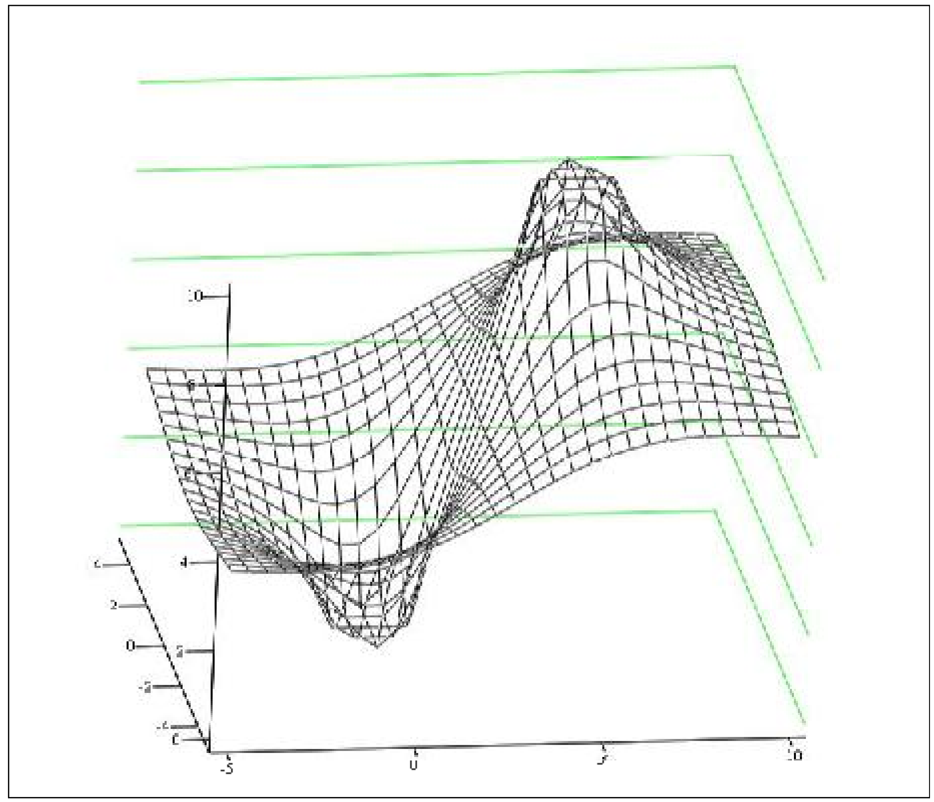
$$Vc(x, y) := \left(\left|x^2 + y^2\right| > R^2\right) \cdot \text{if}\left[\left|(x - b)^2 + y^2\right| > R^2, V(x, y), V1\right]$$

Vom termina eceasta examinare a problemei prin reprezentarea grafica a rezultatelor.
Mai intai vom realiza matricea de coordonate; apoi vom gasi valori ale potentialului.

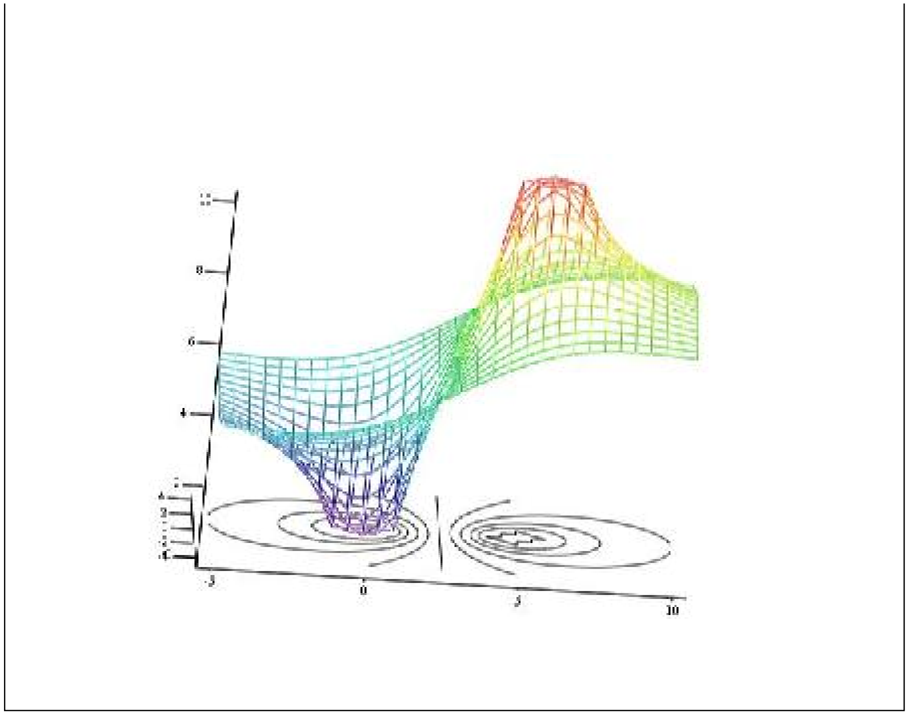
$Nx := 30 \qquad Ny := 20$

$i := 0..\,Nx \qquad j := 0..\,Ny \qquad X_{i,j} := -5 + i \cdot \frac{15}{Nx} \qquad Y_{i,j} := -5 + j \cdot \frac{10}{Ny}$

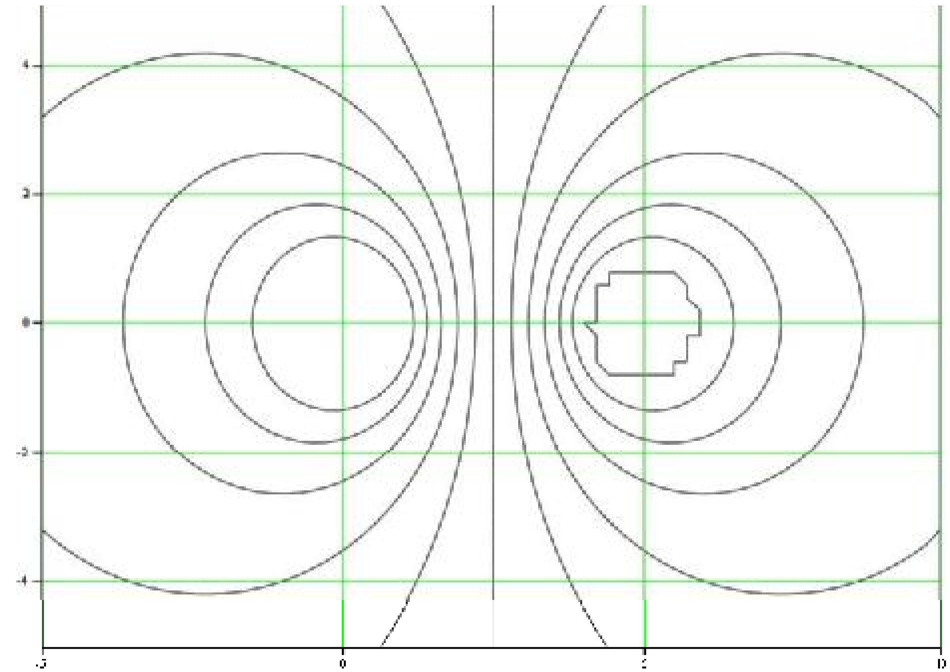
$VM_{i,j} := Vc\left(X_{i,j}, Y_{i,j}\right)$



(X, Y, VM)



(X, Y, VM), (X, Y, VM)



(X, Y, VM)

Motivul pentru care forma din dreaptaarata ciudat, este pentru ca reprezinta linia de potential a cilindrului centrat. Cu toate ca punctele din interior au acelas potential ca si suprafata, este o ambiguitatein ceea ce priveste forma curbei.

$Nx := 70$ $Ny := 50$

$i := 0..\,Nx$ $j := 0..\,Ny$ $X_{i,j} := -5 + i\cdot\frac{15}{Nx}$ $Y_{i,j} := -5 + j\cdot\frac{10}{Ny}$

$VM_{i,j} := Vc\left[\left(X_{i,j}\right),\left(Y_{i,j}\right)\right]$